

Help Homework 4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 9 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (9 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 1 \\ 1 & 9 - \lambda \end{vmatrix} - (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 - \lambda \end{vmatrix} + (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 - \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (9 - \lambda) \cdot [(9 - \lambda)^2 - 1] - [(9 - \lambda) - 1] + [1 - (9 - \lambda)]$$

$$= (9 - \lambda)^3 - (9 - \lambda) - (9 - \lambda) + 1 + 1 - (9 - \lambda)$$

$$= (9 - \lambda)^3 - 3 \cdot (9 - \lambda) + 2$$

$$= (9 - \lambda)^3 - (9 - \lambda) - 2 \cdot (9 - \lambda) + 2$$

$$= (9 - \lambda) [(9 - \lambda)^2 - 1] - 2 \cdot [(9 - \lambda) - 1]$$

$$= (9 - \lambda) [(9 - \lambda) + 1] [(9 - \lambda) - 1] - 2 \cdot [(9 - \lambda) - 1]$$

$$= [(9 - \lambda) - 1] \{ (9 - \lambda) [(9 - \lambda) + 1] - 2 \}$$

$$= [(9 - \lambda) - 1] \cdot [(9 - \lambda)^2 + (9 - \lambda) - 2]$$

$$= [(9 - \lambda) - 1] \cdot [(9 - \lambda) + 2] \cdot [(9 - \lambda) - 1]$$

$$= (8 - \lambda)(11 - \lambda)(8 - \lambda)$$

$$= -(\lambda - 8)(\lambda - 11)(\lambda - 8)$$

$$= -(\lambda - 8)^2 (\lambda - 11)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 8 \quad \lambda_3 = 11$$

Método 1 con Matlab para calcular los eigenvalores:

```
Command Window
>> A=[9 1 1;1 9 1;1 1 9]

A =

     9     1     1
     1     9     1
     1     1     9

>> I=eye(3)

I =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> syms lambda
>> f=det(A-lambda*I)

f =

- lambda^3 + 27*lambda^2 - 240*lambda + 704

>> solve(f,lambda)

ans =

     8
     8
    11
```

Método 2 con Matlab para calcular los eigenvalores:

```
Command Window
>> lambda = eig(A)

lambda =

     8.0000
     8.0000
    11.0000
```

Cálculo de los eigenvectores para el eigenvalor $\lambda_3 = 11$:

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9x + y + z \\ x + 9y + z \\ x + y + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x \\ 11y \\ 11z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x + y + z = 11x \\ x + 9y + z = 11y \\ x + y + 9z = 11z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Aplicando Gauss-Jordan a este último sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = t$$

$$\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los eigenvectores para el eigenvalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$:

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9x + y + z \\ x + 9y + z \\ x + y + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x \\ 8y \\ 8z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x + y + z = 8x \\ x + 9y + z = 8y \\ x + y + 9z = 8z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Aplicando Gauss-Jordan a este último sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tenemos dos variables libres:

$$y = r$$

$$z = s$$

La solución para el eigenvector sería:

$$\begin{bmatrix} -r-s \\ r \\ s \end{bmatrix}$$

Pero, como tenemos dos variables libres, podemos expresar este resultado produciendo dos vectores linealmente independientes; basta para ello realizar dos combinaciones de valores de s y de t ; por ejemplo, como primera combinación $r=1$ y $s=0$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y como segunda combinación $r=0$ y $s=1$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nuestro conjunto de eigenvectores para $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$ y $\lambda_3 = 11$ es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Método de Matlab para calcular los eigenvectores de una matriz. Los eigenvectores están en la matriz V (cada columna es un eigenvector, pero no necesariamente con los valores de los parámetros t, r y s que nosotros habíamos escogido; pero siguen el mismo formato que nosotros habíamos anticipado):

```
>> A=[9 1 1;1 9 1;1 1 9]
```

A =

9	1	1
1	9	1
1	1	9

```
>> [V,D] = eig(A)
```

V =

0.0555	0.8146	0.5774
0.6777	-0.4554	0.5774
-0.7332	-0.3592	0.5774

D =

8.0000	0	0
0	8.0000	0
0	0	11.0000