

Ejercicio hecho en clase

Dado el vector imagen $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ que pertenece a R^3 encontrar los vectores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (pre-imágenes) de R^4 con

los cuáles esa imagen $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ puede ser obtenida. **Los datos de la transformación son:**

$$T(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v}$$

$$T: R^4 \rightarrow R^3$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Traduzcamos a símbolos nuestro problema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el producto de la matriz A y el vector $\mathbf{v}$ en el miembro izquierdo de la igualdad

anterior igualado a la imagen $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x - 2y + 4z \\ -w + 4x + 5y \\ x + 3y + 4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ -w + 4x + 5y = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

En el sistema de ecuaciones anterior estamos obligados a “soltar variables”, a declararlas libres o independientes, dado que tenemos sólo 3 ecuaciones con cuatro variables **w**, **x**, **y** y **z**. En el mejor de los casos, se declara una de esas variables libre esperando que después el sistema tenga solución única. Apostemos por esta opción y dejemos a **w** como variable libre pasándola al miembro derecho de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0 \\ 4x + 5y + 0z = w \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvamos este sistema de ecuaciones buscando obtener los valores de **x**, **y** y **z** que podemos escribir en forma matricial como (podríamos también haber usado la regla de Cramer para resolverlo, pero vamos a utilizar el método matricial para apoyarnos con Matlab):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por la inversa de su matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con ayuda de Matlab podemos reducir el miembro izquierdo de la relación anterior fácilmente:

```
Command Window
>> B=[1 -2 4; 4 5 0;1 3 4]

B =

     1     -2     4
     4      5      0
     1      3      4

>> syms w;
>> r=[0; w; 0]

r =

     0
     w
     0

>> inv(B)*r

ans =

     w/4
      0
    -w/16
```

Con lo cual:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w}{4} \\ 0 \\ -\frac{w}{16} \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto los vectores v pre-imagen en R^4 tendrán la forma:

$$v = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ \frac{w}{4} \\ 0 \\ -\frac{w}{16} \end{bmatrix}$$

Igualando un nuevo parámetro t a $-\frac{w}{16}$ que es el término con mayor denominador del vector $\mathbf{v}$:

$$t = -\frac{w}{16}$$

$$w = -16t$$

y lo sustituimos en nuestro vector $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16t \\ \frac{(-16t)}{4} \\ 0 \\ -\frac{(-16t)}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16t \\ -4t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = (-16t, -4t, 0, t)$$

así hemos eliminado los denominadores de las componentes del vector $\mathbf{v}$ (nota: en el caso general, hay que igualar a t con w dividida entre el *mínimo común múltiplo de los denominadores* de las cuatro componentes del vector $\mathbf{v}$).

Concluimos que existe un número infinito de vectores $\mathbf{v}$ tales que $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y la única

condición es que $\mathbf{v}$ sea de la forma $\begin{bmatrix} -16t \\ -4t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$ donde el parámetro t puede tener cualquier valor.

Para comprobarlo simplemente multiplicamos la matriz de transformación $\mathbf{A}$ por los vectores $\mathbf{v}$, en la página siguiente:

Command Window

```
>> A=[0 1 -2 4; -1 4 5 0; 0 1 3 4]
```

A =

```
    0     1    -2     4
   -1     4     5     0
    0     1     3     4
```

```
>> syms t;
```

```
>> v=[-16*t; -4*t; 0; t]
```

v =

```
 -16*t
  -4*t
     0
     t
```

fx

```
>> A*v
```

ans =

```
0
0
0
```